

# Curso de electromagnetismo -Capítulo 4-Magnetostática

Rubens Amaral

*Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense*

*Av. Litorânea, S/N, Boa Viagem, Niterói, CEP.24210-340, Rio de Janeiro - Brasil*

9 de maio de 2014

# Capítulo 1

## Magnetostática

### 1.1 Correntes

Relembrando as equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho & \quad , & \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \quad e & \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

vemos que em situações estáticas a fonte do campo magnético é a densidade de corrente,  $\vec{J}$ .

O significado de  $\vec{J}$  é fluxo de carga por unidade de área. A corrente que atravessa uma superfície é dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

Daí se tira que se uma distribuição contínua de cargas apresenta densidade  $\rho(\vec{r})$  e um campo de velocidades, a velocidade média em cada ponto do espaço,  $\vec{v}(\vec{r})$ , a densidade de correntes será

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}). \quad (1.1.2)$$

Para uma carga pontual no ponto  $\vec{r}_0$  com velocidade  $\vec{V}_0$  a corrente será

$$\vec{J} = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{V}_0.$$

e para uma coleção de cargas

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \vec{V}_{\alpha}.$$

Veja que trocando a coleção discreta por um contínuo de cargas se volta à equação 1.1.2.

Como se descreve a densidade decorrente associada a um fio condutor de correntes? Troque a distribuição discreta por uma distribuição linear de cargas e obtenha

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int dl \lambda(l) \delta(\vec{r} - \vec{r}'(l)) \vec{V}(l).$$

Às vezes se precisa de descrever o fluxo de carga ao longo de uma superfície,  $\vec{K} = \sigma\vec{V}$ , e não ao longo de um fio. Supomos aqui que uma densidade superficial de cargas  $\sigma$  flui ao longo da superfície com velocidades  $\vec{V}$ . O dicionário para trocar densidade volumétrica de corrente por densidade superficial de corrente é

$$\int dV \vec{J} \leftrightarrow \int da \vec{K} \leftrightarrow \int da \sigma \vec{V},$$

Falta um conceito importante: a noção de continuidade de cargas. É uma lei da natureza, não falseada até agora por nenhum experimento, que a carga se conserva. No que diz respeito à densidade de corrente a conservação se obtém da expressão alternativa da taxa de variação da carga em um volume, em termos da corrente que sai pela superfície do bordo do volume, e em termos da taxa de variação no tempo da densidade de cargas, ufa!:

$$\int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{dQ_V}{dt} = - \int_{\delta V} \vec{J} \cdot d\vec{a} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3r,$$

onde usamos o teorema da divergência. Obtemos então que a lei de conservação se expressa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

*Desafio:* Tome para uma partícula se movendo de acordo com  $\vec{r}_0(t)$ ,  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$  e  $\vec{J}(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$  e verifique a validade da equação acima.

Esta equação é fundamental para a consistência das equações de Maxwell. Você é convidado, talvez incentivado, induzido, intimado, a verificar que ela pode ser derivada das equações de Maxwell. No nosso caso, estaremos interessados em situações estáticas. Elas se caracterizam por  $J$  depender, possivelmente do espaço, mas não do tempo. Nesses casos se obtém

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

## 1.2 Equações básicas da magnetostática

Vamos lidar com campos que não dependem do tempo e com correntes que também não dependem. Nesse caso as equações do campo elétrico e do campo magnético se desacoplam. A única relação entre elas permanece na inter-relação entre as fontes, a definição da corrente em termos de cargas (Desconfio que mesmo isso tem de ser relaxado, no caso de spin). Queremos resolver as equações

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (1.2.3)$$

A última delas é a lei de Ampère, com  $\mu_0$  a permeabilidade do vácuo. Note que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  é necessária.

Bem, como no caso da eletrostática o teorema de Helmholtz resolve a questão:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.2.4)$$

com

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\Delta r}. \quad (1.2.5)$$

O potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r})$  exerce na magnetostática papel análogo ao de  $\phi(\vec{r})$  na eletrostática. Parece que alegar analogia entre  $\vec{A}$  e  $\phi$  é otimismo exacerbado. Afinal por que precisamos de 3 componentes do potencial vetorial e somente uma grandeza no caso do potencial escalar para definir, em ambos os casos, campos, magnético ou elétrico, que tem 3 componentes cada? Bem, a analogia entre o potencial vetor e o potencial escalar se manifesta na liberdade de gauge. Redefinir o potencial escalar pelo acréscimo de uma constante,  $\phi' = \phi + c$ , nada muda da física. O campo elétrico é o mesmo. Utilizamos essa liberdade para calcular o potencial produzido por uma linha de cargas infinita, escolhendo o zero do potencial em uma distância finita. Da mesma maneira temos a liberdade de gauge: qualquer que seja o campo  $\psi(\vec{r})$ ,

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}),$$

dá origem ao mesmo campo magnético que  $\vec{A}$ . De fato

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = \vec{B}.$$

**Importante:**  $\vec{A}'$  e  $\vec{A}$  são completamente equivalentes. Não há distinção física entre eles. Da mesma maneira que  $\phi$  e  $\phi'$ .

*Obs: O conjunto de transformações de gauge dos potenciais pode ser ampliado. Mesmo que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  não dependam do tempo, a redefinição conjunta*

$$\phi' = \phi - \partial_t \psi(\vec{r}, t) \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t),$$

*não muda as definições do campo elétrico a magnético, se eles são definidos por*

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \partial_t \vec{A} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Note que a expressão do potencial em termos da integral de  $\rho \frac{1}{\Delta r}$  define o potencial para uma condição de gauge específica, no caso de cargas localizadas em uma região "finita", o campo vai a zero no infinito. Da mesma maneira a expressão na eq. 1.2.5 define o potencial vetor em uma condição de gauge específica. Para entender melhor, vamos calcular a divergência de dois potenciais vetores relacionados por uma transformação de gauge.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\psi.$$

Conclusão: o valor da divergência de um potencial vetor pode ser mudado conforme o gosto do freguês. Basta ajustar o laplaciano de  $\psi$ . Qual a condição sobre a divergência de  $\vec{A}$  que está embutida na equação 1.2.5?

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \int_V d^3r \vec{J}(\vec{r}') \cdot (\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r}) = \int_V d^3r \vec{J}(\vec{r}') \cdot (-\vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta r}) \\ &= - \int_V d^3r \vec{\nabla}' \cdot (\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{\Delta r}) + \int_V d^3r \frac{1}{\Delta r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = \int_{\delta V} \vec{d}\vec{a} \cdot (\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{\Delta r}). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Onde usamos o teorema da divergência e a conservação da corrente. Em geral o termo se superfície se anula, se as fontes são localizadas. Resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

A relação entre  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$  não é tão imediata como a relação entre  $\vec{E}$  e  $\phi$ . Como  $\vec{E}$  vem do gradiente de  $\phi$  a variação de  $\phi$  em um pequeno intervalo te dá informação sobre a componente de  $\vec{E}$  na direção do intervalo. Quanto a  $\vec{B}$ , aplicando o teorema de Stokes à equação 1.2.4, vemos que a integral de caminho de  $\vec{A}$  em um circuito plano fechado dá informação sobre a componente de  $\vec{B}$  ortogonal à superfície:

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\delta S} \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

onde usamos  $S$  para simbolizar, por licença poética, tanto a superfície, com vetor normal  $\hat{n}$ , como a medida da sua área.

### 1.2.1 Exemplos

O cálculo de  $\vec{A}$  a partir das correntes é em geral mais laborioso que o cálculo de  $\phi$  a partir das cargas. Mas em alguns casos vale a pena ressaltar as semelhanças. Vamos ver alguns casos?

**Exemplo 1: fio reto infinito com corrente** Considere um fio ao longo do eixo  $z$  portanto uma corrente  $I$ .

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' I \frac{\hat{z}}{\Delta r} = I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\hat{z}}{\sqrt{s^2 + (z - z')^2}}.$$

Epa, acho que já fizemos essa integral antes! Vamos complicar um pouco: que tal fazer a integral entre  $-L_1$  e  $L_2$ ? Pra que ganhar pouco se vamos realizar a integral? Chamando o potencial deste caso de  $\vec{A}_L$ , vamos calcular no plano  $z = 0$ , já que a dependência em  $z$  pode ser resgatada dos valores dos  $L,s$  ( imagine uma translação em  $z'$ ):

$$\vec{A}_L = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-L_1}^{L_2} dz' \frac{1}{\sqrt{s^2 + z'^2}} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s}\right) \right),$$

onde  $s^2 = x^2 + y^2$ , utilizamos a mudança de variáveis  $z = s \sinh(\theta)$ , e a função arco-seno-hiperbólico é  $\sinh^{-1}$ . Bem, comparando com o problema primo deste na eletrostática, o fio carregado, lembramos que lá fizemos uma transformação de gauge, redefinindo o zero do potencial. Aqui também fazemos isso, com  $\psi(\vec{r}) = \psi(z) = -\frac{I\mu_0}{4\pi} z \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s_0}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s_0}\right) \right)$ , com  $s_0$  uma constante.

$$\vec{A}_L(\vec{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s_0}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s_0}\right) \right)$$

Calculamos o potencial vetor associado a uma "segmento de fio" reto finito. Tomando o limite  $L_1 = L_2 = \infty$ , o que somente pode ser feito após a transformação de gauge (verifique), resulta que o potencial vetor de um fio infinito é

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right).$$

Daí, o campo magnético, usando a expressão do rotacional em coordenadas cilíndricas, será

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}.$$

O potencial vetor é paralelo ao fio e o campo magnético tem suas linhas de campo fazendo voltas circulares ao redor do fio. Este é o comportamento padrão dos campos  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , que deve fazer parte do seu arsenal intuitivo.

**Exemplo 2 - Campo de um plano** Esse exemplo é teoricamente importante. Um plano de cargas uniformemente carregado, densidade  $\sigma$ , plano xy, é posto em movimento com velocidade constante,  $v$ , da direção  $\hat{x}$ . Cria-se uma densidade superficial de correntes,  $\vec{K} = K\hat{x} = \sigma\hat{v}$ . Só temos componente  $x$ :

$$A_x(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty, -\infty}^{\infty, \infty} dx dy \frac{K}{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty s ds \frac{K}{\sqrt{z^2 + s^2}} =$$

"Peraí"! Faz uma transformação de gauge antes de calcular o limite a infinito. Explicando: tomamos a integral até  $R$ , e não infinito. Com  $R$  fixo escolhemos  $\psi(x) = -x \frac{\mu_0}{2} \int_0^R s ds \left( \frac{K}{z_0^2 + s^2} \right)$ . Após a transformação de gauge tomamos o limite  $R \rightarrow \infty$ :

$$A_x(z) = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty s ds \left( \frac{K}{\sqrt{z^2 + s^2}} - \frac{K}{\sqrt{z_0^2 + s^2}} \right) = \frac{\mu_0 K}{2} \lim_{S \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(s^2 + z^2)} - \sqrt{(s^2 + z_0^2)} \right) /_0^\infty = \frac{\mu_0 K}{2} (z_0 - |z|).$$

Veja que a transformação de gauge permitiu realizar o limite quando  $S \rightarrow \infty$ .

O rotacional de  $\vec{A}$  nos dá

$$\vec{B} = -\hat{y} \frac{\mu_0 K}{2} \frac{|z|}{z}.$$

O campo resultante não depende do módulo da distância ao plano. O que me chama mais a atenção nesse resultado, é o módulo aparecer! Significa algo muito importante: A componente  $y$  do campo magnético sofre uma descontinuidade ao atravessar o plano  $z = 0$  no qual há uma corrente na direção  $\hat{x}$ ! Em bom português:

$$\Delta \vec{B} \cdot (\hat{K} \times \hat{n}) = \mu_0 K$$

ou

$$\hat{n} \times \Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{K}.$$

Aqui  $\hat{n}$  é o vetor normal à superfície onde flui a corrente superficial  $\vec{K}$ . Essa descontinuidade é um fato da vida, do mesmo modo que a descontinuidade da componente normal de  $\vec{E}$  ao atravessar um plano carregado.

**Exemplo 3: espira circular** Fig. 1.1.

Nesse caso é um tanto chato de calcular o  $\vec{A}$ . Um pouco mais de atenção é necessária. Imagine um círculo de raio  $R$ , no plano  $z = z_0$ , centrado no eixo  $z$  e portando cargas, densidade linear  $\lambda$ . Ele é posto a girar, velocidade angular  $w$ , em torno do seu eixo. Resulta um círculo de corrente,  $I = \lambda w R$ . Podemos calcular o potencial vetor no plano  $xz$ , sem perda de generalidade. A componente  $A_z$  é identicamente nula e a  $A_x$  também se anula por simetria já pontos do círculo em posições opostas ao plano  $xz$  ( $y \leftrightarrow -y$ ) contribuem com sinais trocados. A única componente relevante é  $A_y$ . Chamando o ângulo azimutal de  $\varphi$  temos  $I_y = I \cos \varphi$ ,  $\Delta \vec{r} = (z - z_0)\hat{z} + (x - R \cos \varphi)\hat{x} + R \sin \varphi \hat{y}$ ,

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cos \varphi R d\varphi}{\Delta r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos \varphi R}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2 - 2xR \cos \varphi}} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \xi \quad (1.2.7)$$

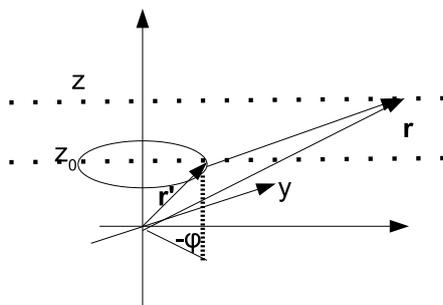


Figura 1.1: Espira de corrente.

com  $\xi = \int_0^\pi \frac{R \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta \cos \varphi}}$ ,  $\alpha = \sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2}$  e  $\beta = 2xR$ , sendo expressa como uma integral elíptica. Não existe uma expressão como funções algébricas. O importante é notar que  $\vec{A} = f(x, z)\hat{y}$ , que generalizando para qualquer ponto, e não para pontos exclusivamente no plano xz, resulta  $\vec{A} = f(s, z)\hat{\varphi}$ . Daí se obtém

$$\vec{B} = -\frac{\partial f}{\partial z}\hat{r} + \frac{1}{s}\frac{\partial(sf)}{\partial s}\hat{z}.$$

O limite quando  $x$  é muito pequeno pode ser obtido. Expandindo o integrando nesse limite resulta

$$A_y = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{xR^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

que se generaliza para todo o espaço como

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{sR^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

O rotacional fornece, para pontos no eixo  $z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}.$$

Com algum trabalho, obtivemos a expressão do campo magnético ao longo do eixo de simetria do círculo.

**Exemplo: casca esférica uniformemente carregada e girando** Esse caso dá um tanto de trabalho mas o resultado final é muito importante. Vamos começar descrevendo num sistema de coordenadas em que  $\tilde{z}$  aponta na direção do eixo em torno do qual a esfera gira, e no qual o ponto de observação é escolhido estar no plano  $\tilde{y} = 0$ .

O ponto de partida será tomar  $I_j \rightarrow RK_j \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta}$ , ou  $I_j d\tilde{\varphi} \rightarrow RK_j \sin \tilde{\theta} d\tilde{\Omega}$  na expressão da espira

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{dI_i R d\varphi}{\Delta r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} K_i \frac{d\tilde{\Omega} R^2}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2 - 2xR \cos \tilde{\varphi}}} \quad (1.2.8)$$

Agora em vez de continuar com esse sistema de coordenadas, escolhemo um sistema em que o eixo  $z'$  aponta na direção do ponto de observação  $\vec{r} = z\hat{z}'$ . Nesse sistema temos, chamando de  $\theta$  o ângulo entre o eixo  $z$  e a velocidade angular, lembrando que  $\vec{K} = \sigma\vec{\omega} \times \vec{r}'$ ,

$$\vec{\omega} = (\omega \sin \theta, 0, \omega \cos \theta); \vec{r}' = (R \sin \theta' \cos \varphi', R \sin \theta' \sin \varphi', R \cos \theta')$$

$$\vec{K} = (\sigma\omega R)(-\cos \theta \sin \theta' \sin \varphi', -\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi')$$

A vantagem é que a raiz no denominador do integrando se torna simplesmente  $\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta'}$ . A integral em  $d\varphi'$  aniquila quase todas as contribuições, lineares em  $\sin \varphi'$  e em  $\cos \varphi'$ . Resulta somente a integral, lembrando que  $d\tilde{\Omega} = d\Omega$ ,

$$A_2 = \frac{-R^3 \mu_0 \sigma \omega \sin \theta}{4\pi} \int d\Omega' \frac{\cos \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta'}} = \frac{-\mu_0 R^3 \sigma \omega}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\mu}}$$

$$= \frac{\mu_0 R \sigma \omega}{6r^2} [(R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r)] \quad (1.2.9)$$

Daí

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 R \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}, \text{ Se } r < R, \text{ e}$$

$$= \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}, \text{ Se } r > R. \quad (1.2.10)$$

O campo magnético obtido calculando o rotacional, resulta uniforme para  $r < R$

$$\vec{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{z}, \text{ Se } r < R, \text{ e}$$

$$= \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\omega}), \text{ Se } r > R. \quad (1.2.11)$$

Esse resultado é muito parecido com o campo elétrico de uma casca esférica carregada proporcionalmente a  $\cos \theta$ , não é mesmo? Compare os dois resultados.

### 1.3 Lei de Ampère

Só para lembrar: iniciamos com a lei de Ampère, mas se a houvéssemos esquecido podemos resgatá-la do potencial vetor como segue.

Primeiro um resultado fantástico: cada componente de  $\vec{A}$  satisfaz à Lei eq. Poisson com a componente da corrente substituindo a densidade de cargas. Demonstração? Tome a componente  $A_i$  e expresse-a

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{J_i}{\Delta r}. \quad (1.3.12)$$

Essa é a mesma expressão do potencial escalar,  $A_i \leftrightarrow \phi$ , em termos de  $\rho$ ,  $J_i \leftrightarrow \rho$ , substituindo  $\epsilon_0 \leftrightarrow \frac{2}{\mu_0}$ . Resulta

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Essa pode ser chamada de Lei de Ampere diferencial para o potencial vetor.

Tomando agora o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

Ou, seja, a lei de Ampere. A lei de Ampere pode ser posta em forma integral, assim como a lei de Gauss pode ser diferencial ou integral:

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} = \int_S d\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \int_{\delta S} \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

Observe a analogia: Eletrostática: Lei de Coulomb  $\longleftrightarrow$  Lei de Gauss ( Formas diferencial ou integral).

Magnetostática: Lei de Bio-Savart  $\longleftrightarrow$  Lei de Ampere ( Formas diferencial ou integral).

Como assim, Lei de Bio-Savart? De fato a equação 1.3.12 nada mais é que a lei de Bio-Savart escrita em termos do potencial vetor:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\Delta r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\Delta r} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2}. \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

Essa última expressão para  $B$  expressa a lei de Bio-Savart, que pode assumir diversas formas:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int da' \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dl' \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2}, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

onde foi possível fatorar  $I$  na última expressão devido à conservação da corrente. A lei de Biot-Savart representa para a magnetostática o mesmo que a lei de Coulomb representa para a Eletrostáticas.

É fácil aplicar diretamente a equação de Biot-Savart em alguns casos. Veja o fio infinito ao longo do eixo  $z$  com o campo calculado inicialmente no ponto  $(x, y=0, z=0)$ .  $d\vec{l}' = dl' \hat{z}$ ,  $\Delta \vec{r} = -z' \hat{z} + x \hat{x}$ ,  $d\vec{l}' \times \Delta \vec{r} = -x \hat{y}$ , e

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dz'}{(x^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A transformação  $z' = x \sinh \theta$  resolve a parada trivialmente,  $B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ , ou em todo o espaço

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{e}_\varphi.$$

Espera aí, novamente fizemos a integral, melhor fazer para  $z'$  iniciando em  $-L_1$  e terminando em  $L_2$ :

$$\vec{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \left( \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 + s^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + s^2}} \right).$$

Observe que o campo magnético para o fio infinito pode ser obtido ainda por um terceiro método. Por simetria  $\vec{B} = \varphi B(s)$ . Agora usando a lei de Ampere na forma integral resulta, para um circuito de integração circular de raio  $s$ ,

$$\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} s B(s) = 2\pi s B(s),$$

simples, não? **Por favor** preste a máxima atenção para a forma como a simetria foi utilizada! A simetria é usada primeiro, depois a integral é realizada. A integral não determina a forma simples de  $B$ . A simetria ou faz! A vontade que a integral seja trivial não é argumento para que ela o seja! A simetria nesse caso sugere que  $\vec{B}$  dê voltas em torno do fio, e não que aponte radialmente como no caso de  $\vec{E}$ .

Exercício: Utilize a lei de Biot-Savart (para  $\vec{B}$ ) para obter o campo magnético de uma espira circular em pontos no eixo de simetria.

## 1.4 Resumo

O quadro na Fig. 1.2 mostra o conjunto de inter-relações entre os campos.

Compare com o quadro análogo no caso da eletrostática.

## 1.5 Mais alguns exemplos de aplicação da Lei de Ampere

Exemplo: Campo magnético ao longo de um polígono regular:

Campo de um plano

Campo de Solenoide infinito.

## 1.6 Força de Lorentz

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}).$$

Obs: quando realizamos transformação de Lorentz, levando em conta a relatividade, os campos elétricos e magnéticos são transformados em conjunto. Esse argumento sugere ver a força de Lorentz como um conjunto, e não como forças separadas.

*Provocação: qual a descrição lagrangeana da dinâmica da partícula que leva a essa força?*

Obs: Atuando sobre partículas carregadas em movimento de translação ( e coletâneas delas) o campo magnético não realiza trabalho.

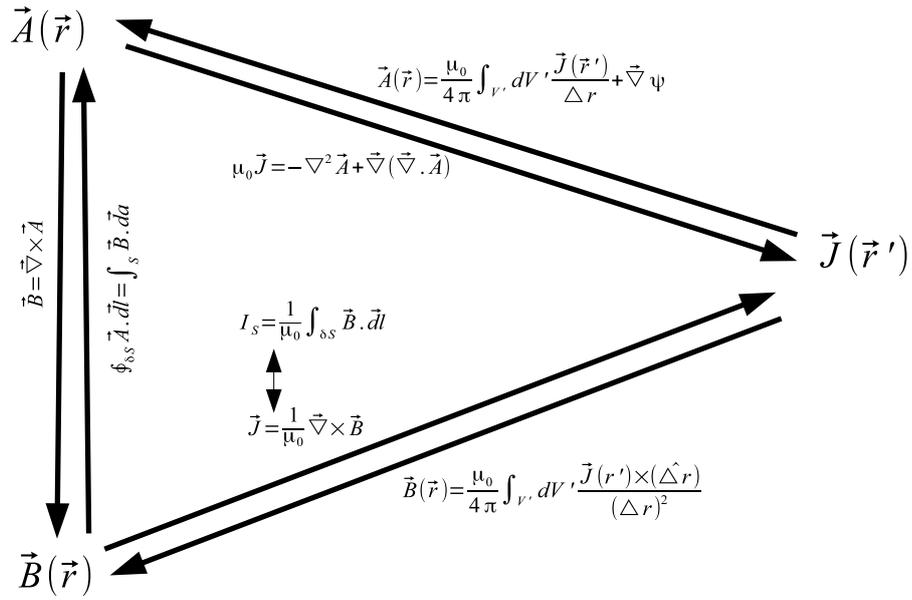


Figura 1.2: Quadro resumo Magnetostática.

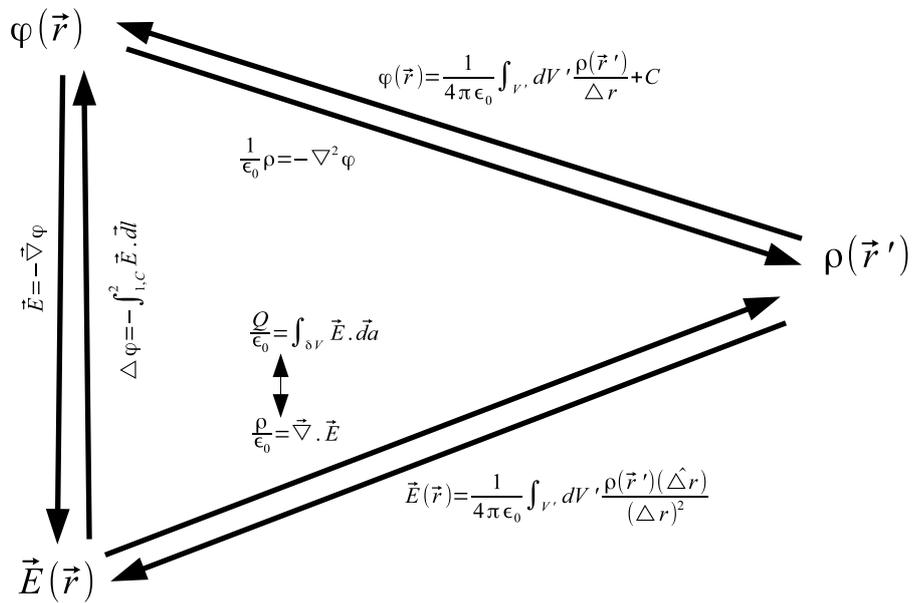


Figura 1.3: Quadro resumo Eletrostática.

Exemplo: 1) Movimento ciclotrônico. Campo magnéticos uniforme na direção  $z$ .  $QV_{xy}B_z = mV_{xy}^2/R$ . Componente  $x_z$  em movimento uniforme.

2) Cicloide:  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  uniformes com  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ .  $B_i = B\delta_{i3}$ ,  $E_i = E\delta_{i1}$ .

$$F_i = Q(\delta_{i1} + \epsilon_{ijk}V_j\delta k_3) = Q(E\delta_{i1} + B\epsilon_{ij3}V_j)$$

Resulta:  $V_3$  constante. As equações das componentes  $x$  e  $y$  são simplificadas escolhendo definir  $w \equiv QB/B$  e  $V \equiv E/B$  ( os nomes dessas constantes e das demais são motivadas por análise dimensional). Resulta

$$\ddot{x} = wv + w\dot{y}; \quad e \quad \ddot{y} = -w\dot{x}.$$

As equações acima ficam escritas como uma única, quando expressa em termos da variável complexa  $Z = x + iy$ ,  $\ddot{Z} = w(V - i\dot{Z})$ . O termo  $wV$  some com  $Z \rightarrow Z' = Z + iVt$ :

$$\ddot{Z}' = -iw\dot{Z}',$$

que tem solução imediata,  $\dot{Z}' = e^{-iwt}\dot{Z}_0$ . Escrevendo a constante complexa  $\dot{Z}_0 = iwe^{i\phi_0}R$ , e integrando em relação ao tempo obtemos  $Z' = e^{-iwt+i\phi_0}R + Z_0$ , onde  $Z_0$  é a nova constante de integração. Expressando em termos de  $Z$ ,

$$Z = e^{-i(wt-\phi_0)}R + Z_0 - iVt.$$

Tomando as partes Real e imaginária, e escrevendo  $Z_0 = x_0 + iy_0$  resulta

$$\begin{aligned} x &= R \cos(wt - \phi_0) + x_0 \\ y &= -R \sin(wt - \phi_0) + y_0 - Vt. \end{aligned} \tag{1.6.15}$$

Agora ficou clara a interpretação: A partícula executa movimentos circulares de raio  $R$ , no sentido anti-horário, com velocidade angular  $w$  cujo centro se move ao longo de uma reta na direção  $y$  passando por  $(x_0, y_0)$  no tempo inicial.

Força sobre correntes( dicionário):

$$Q\vec{V} \leftrightarrow \vec{J}dV \leftrightarrow \vec{K}da \leftrightarrow \vec{I}dl = I\vec{dl}$$

Exemplos: 1)um circuito retangular com um lado imerso num campo uniforme que vai a zero abruptamente. Fig 1.4.

$$\vec{F} = IaB\hat{z}$$

Problema: Encontre a força no circuito retangular da figura 1.5

2) Força, por unidade de comprimento, entre fios infinitos paralelos: Força exercia por (1) em (2):

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\hat{x})$$

$$\vec{f}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}(-\hat{y}),$$

sentido atrativo se  $I_1 I_2 > 0$ .

Problema: encontre a força por unidade de área que um plano de correntes exerce em outro. Considere as correntes e os planos paralelos.

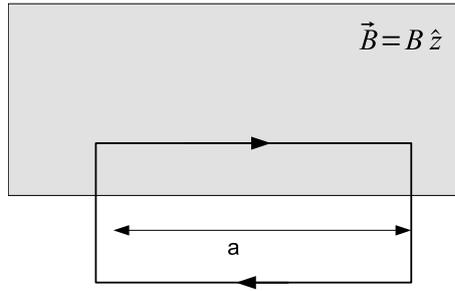


Figura 1.4: circuito retangular.

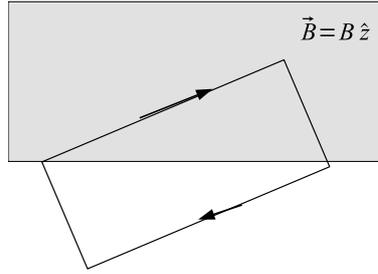


Figura 1.5: circuito retangular.

## 1.7 Expansão em multipolos

A expansão em multipolos pode ser obtida repetindo o processo feito no caso da eletrostática:

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\Delta r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos(\theta)) \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{r^2} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \hat{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^3} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \left(-\frac{1}{8}\right) (3(\vec{r}' \cdot \hat{r})^2 - r'^2) + \dots \right] \quad (1.7.16)
 \end{aligned}$$

Primeira diferença: O primeiro termo é nulo, ou seja, não há monopolo magnético.

$$\int dV J_i = \int dV J_j \delta_{ij} = \int dV J_j \partial_j x_i = \int dV (\partial_j (J_j x_i) - x_i \partial_j J_j) = 0,$$

já que a corrente se conserva,  $\partial_j J_j = 0$  e é localizada, portanto usando o teorema da divergência a derivada total não contribui.

Do mesmo modo, repetindo o uso do teorema de divergência e da conservação da corrente,

$$\int dV x_k J_i = \int dV x_k J_j \partial_j x_i = \int dV (\partial_j (x_k J_j x_i) - x_i \partial_j (x_k J_j)) = - \int dV x_i (\partial_j x_k) J_j = - \int dV x_i J_k.$$

Essa identidade pode ser interpretada de maneira simples: a expressão  $x'_i J_j(\vec{r}')$  se comporta como um símbolo antissimétrico nos índices  $ij$  após a integração, em  $dV'$ . Traduzindo em símbolos:

$x'_i J_j(\vec{r}') \approx -x'_j J_i(\vec{r}') \approx \frac{1}{2}(x'_i J_j(\vec{r}') - x'_j J_i(\vec{r}'))$ . Conclusão importante sobre o termo de dipolo magnético:  $\vec{A}_{\text{dipolo}}$  é ortogonal a  $\vec{r}$ . De fato se calculamos a contribuição de dipolo para  $\vec{A} \cdot \vec{r}$  teremos obter a integral de  $r_i J_i(\vec{r}') r_j r'_j = (r_i r_j)(J_i r'_j)$ . Mas o primeiro fator é simétrico enquanto o último é antissimétrico sob integração ( após integrado). Como a soma em ambos os índices ( contração) de um símbolo simétrico com um antissimétrico é identicamente nula, resulta a ortogonalidade procurada. Deve ser possível então escrever o  $\vec{A}_{\text{dipolo}}$  como o produto vetorial de  $\vec{r}$  por outro termo. De fato, no cálculo do potencial vetor de dipolo, precisamos integrar  $J_i r'_j r_j$ , mas ( $\approx$  significa iguais sob integração):

$$2r_j(r'_j J_i) \approx r_j(r'_j J_i - r'_i J_j) = r_j r'_m J_l (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) = r_j r'_m J_l \epsilon_{kij} \epsilon_{kmj} = ((\vec{r}' \times \vec{J}) \times \vec{r})_i.$$

Resulta então

$$\vec{A}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{8\pi r^2} \vec{m} \times \hat{r},$$

com

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')$$

sendo chamado o momento de dipolo magnético.

O cálculo do rotacional deste potencial pode ser feito imediatamente usando novamente a regra para contração simples de duas  $\epsilon$ 's resultando em

$$\vec{B}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \right).$$

Mutatis-mutantibus, é a mesma expressão encontrada na eletrostática. Compare! Será que falta alguma coisa?

O momento de dipolo magnético de um circuito fechado ( $\vec{J} dV' \rightarrow I d\vec{l}'$ ) tem uma interpretação simples

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_C \vec{r}' \times d\vec{r}' = I \vec{S}.$$

Aqui  $\vec{S}$  tem uma interpretação geométrica: é a **área vetorial** da superfície que tem  $C$  como bordo. Como não há monopolo magnético esperamos que o momento de dipolo não dependa da origem. De fato uma mudança de origem muda  $\vec{r}$  por um vetor constante,  $\vec{D}$ , e  $\oint \vec{D} \times d\vec{r}' = \vec{D} \times \oint d\vec{r}' = 0$ .

*Problema:* demonstre que o momento de dipolo não depende da origem no caso geral de uma densidade de correntes volumétrica.

Do mesmo modo que no caso elétrico, podemos falar de um dipolo pontual, basta tomar a área do circuito indo a zero ao mesmo tempo em que o seu produto pela corrente é constante.

*Problema:* Para uma carga pontual o momento de dipolo é  $q\vec{r}' \times \vec{V}$ . Mostre que para uma coletânea de cargas pontuais com a mesma relação carga massa se encontra  $\vec{m} \propto \vec{L}$ , onde  $\vec{L}$  é o momento angular e encontre a constante de proporcionalidade.

*Problema:* Uma corrente  $I$  flui ao longo das arestas de um dos diedros de um paralelepípedo, Fig. 1.6. Encontre o momento de dipolo magnético e descreva o campo magnético longe do paralelepípedo.

A noção de momento de dipolo é extremamente importante. Do ponto de vista prático, para descrever o campo magnético encontrado em diversos tipos de materiais, entender a relação entre

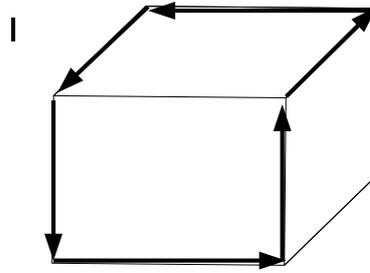


Figura 1.6: Circuito não plano

o campo aplicado e os dipolos magnéticos induzidos é essencial. De um ponto de vista da descrição das partículas elementares, se observa que o elétron apresenta um momento de dipolo magnético intrínseco, associado ao spin. Apesar de ser útil visualizar esse spin, que é momento angular, e o seu momento de dipolo magnético associado, como devidos à rotação do elétron em torno de si mesmo, ao final de tudo temos que o spin é uma nova variável dinâmica, que tem um descrição fundamentalmente quântica. Meu ponto de vista é esse: o campo magnético tem origem em movimentos de cargas  $e$  em spin's.